Comunicaciones

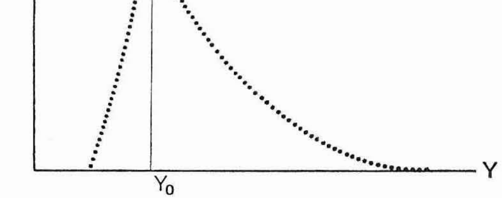
JUAN BARÓ: **Pareto y la distribución de la Renta**

La curva del reparto

Sería el francés Laurent [1] quien definiera la curva de Pareto como la más importante aportación de la economía matemática de todos los tiempos. Verdaderamente la frase ha quedado obsoleta hoy en día ante el progresivo avance de la investigación econométrica que, desde 1930 aproximadamente, tomaría caracteres de renacimiento. A pesar de ello, la distribución paretiana de la renta no se ha visto desplazada y sigue utilizándose como uno de los instrumentos más idóneos para la medición del reparto de la riqueza.

A partir de series estadísticas Pareto quiso encontrar una ley que con alto grado de fiabilidad respondiera a los datos que empíricamente se habían observado, tratando de encontrar posteriormente una base racional para todo su análisis; efectivamente, éste era uno de los caminos a seguir para la obtención de las tan famosas, en aquel tiempo, leyes naturales económicas.[2]

En todas las observaciones estadísticas sobre el reparto de las rentas una cosa quedaría clara para Pareto: la distribución de los ingresos personales es muy parecida en distintos países y en diferentes épocas; así, en todos sus estudios quedaba patente que la nube de puntos de los lugares geométricos de las variables n e Y tomaba la misma forma



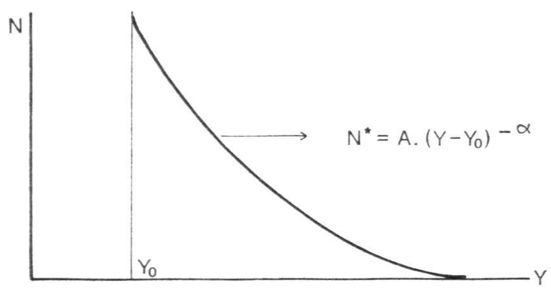
donde n es el número de hogares que disfrutan de determinada renta Y, la cual posee una distribución de tipo campanoide con frecuencia máxima en Y_0, que bien podría ser el ingreso mínimo de subsistencia para una familia, puesto que es atributo de la categoría social que más abunda en cualquier sociedad. Por otro lado, la distribución es marcadamente asimétrica hacia la derecha, cosa lógica si tenemos en cuenta que las categorías de renta superiores a Y_0 son mucho más abundantes que las inferiores, para las que sólo subsisten algunas familias y en condiciones infrahumanas.

Pareto descubriría que, para rentas suficientemente altas, la nube de puntos se ajustaba casi perfectamente a una función de tipo hiperbólico, capaz de explicar por completo el comportamiento de la distribución de los ingresos. Así, para $Y \geqslant Y_0$ observó que el número de familias N con una renta superior o igual a una dada, no menor a Y_0, venían determinadas por la expresión

$$N_i = A \,.\, (Y_i - Y_0)^{-\alpha} + u_i \qquad \forall\ Y_i \geqslant Y_0$$

y con $N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$, supuesta una ordenación creciente para los ingresos.

Y cuya representación gráfica sería



función de fácil manejo que, presentada a doble escala logarítmica, es de gran eficacia en el análisis estadístico, resultando una ecuación linealizada del tipo

$$\ln N^* = \ln A - \alpha \ln (Y - Y_0)$$

a la que será posible aplicar el método de los mínimos cuadrados ordinarios para la resolución de sus parámetros; así, tendríamos

$$B = (Z'Z)^{-1} Z'W$$

donde

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & \ln (Y_1 - Y_0) \\ 1 & \ln (Y_2 - Y_0) \\ . & \dots\dots\dots\dots \\ 1 & \ln (Y_i - Y_0) \\ . & \dots\dots\dots\dots \\ 1 & \ln (Y_k - Y_0) \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} \ln N_1 \\ \ln N_2 \\ \dots \\ \ln N_i \\ \dots \\ \ln N_k \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \ln A \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

Merece especial atención el parámetro funcional α, expresión que se identifica con la elasticidad de la función y que ha sido muy utilizada para explicar la dispersión de los ingresos. Por ejemplo,

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{dN}{N}}{\dfrac{d\,(Y \,.\, Y_0)}{(Y \,.\, Y_0)}} = \frac{d \ln N}{d \ln (Y - Y_0)} = -\alpha$$

La interpretación del coeficiente ha planteado gran cantidad de controversias entre los economistas; para algunos en la medida que sea menor α existirá más justicia distributiva puesto que porcentajes elevados de renta son absorbidos por un gran número de ciudadanos, mientras que para la gran mayoría a mayor elasticidad (en valores absolutos) mejor distribución, puesto que existe más equidad en el reparto. No cabe la menor duda que ambos razonamientos son válidos y que todo el problema consiste en definir lo que uno entiende por justicia en el reparto. Ahondando en el segundo criterio no podemos olvidarnos de la tan traída tesis de Harold Davis, en la que, de acuerdo con el valor de α, cabría etiquetar a una comunidad con los siguientes atributos:

$\alpha = 1{,}5$ ... Equilibrio social
$\alpha < 1{,}5$ ... Sociedad fascista
$\alpha > 1{,}5$ ... Amenaza de revolución social

Por supuesto que esta teoría ha quedado desfasada con el tiempo y sólo tendrá vigencia en aquellos países en los que prevalezcan pautas de comportamiento como las de principios de siglo.

Un caso práctico: España, 1974 [3]

A partir del último muestreo realizado en España para las unidades económicas de consumo [4] ha sido posible confeccionar el siguiente cuadro, en el que se detallan los porcentajes de hogares que pertenecen a cada escalón de renta:

Renta (miles de ptas.)	Hogares (Porcentajes sobre el total)
Menos de 60	7,88
De 60 a 84	6,56
De 84 a 120	12,22
De 120 a 180	21,92
De 180 a 240	18,58
De 240 a 480	27,11
De 480 a 700	4,00
Más de 700	1,73

Nótese que una de las variables viene expresada en porcentajes para una mayor agilidad en el cálculo y que, por supuesto, en nada difiere con el planteamiento que venimos enunciando; así, N será el tanto por ciento de hogares que disfrutan de unos ingresos superiores o iguales a una renta dada, no inferior a 84.000 ptas.; [5] por otro lado, dicho nivel de ingresos Y será el extremo inicial de cada intervalo, por lo que tendremos

Y - 84	N
36	73,34
96	51,42
156	32,84
396	5,73
616	1,73

nube de puntos a la que, como refleja su tendencia, se ajusta una función hiperbólica como la descrita anteriormente.

De este modo, y con las matrices de los logaritmos de las variables endógena y predeterminada,

$$W = \begin{bmatrix} 4{,}29 \\ 3{,}94 \\ 3{,}49 \\ 1{,}75 \\ 0{,}55 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 1 & 3{,}58 \\ 1 & 4{,}56 \\ 1 & 5.05 \\ 1 & 5{,}98 \\ 1 & 6{,}42 \end{bmatrix}$$

es posible determinar los parámetros de la ecuación linealizada

$$\begin{aligned} \ln\ A &= 11{,}27 \\ -\ \alpha &= \ \ 1{,}65 \end{aligned}$$

con lo que puede afirmarse que para España y en 1974 la curva de Pareto tomaba la forma

$$N^* = 78{,}433 \, . \, (Y - 84)^{-1{,}65}$$

donde N^* es el porcentaje estimado de familias cuyos ingresos son iguales o superiores a Y miles de pesetas.

Todo ello con un alto grado de bondad en la regresión; así se ha estimado para el ajuste un coeficiente de determinación de 0,92, a todas luces más que suficiente.

Por otro lado, cabría considerar el valor de α como una medida de la concentración en el reparto de las rentas, contrastándola con valores obtenidos para años precedentes: 2,21 en 1959 [6] y 1,43 en 1965,[7] debiendo utilizarse las cifras con suficiente cuidado, dado que los criterios en que se basan los distintos autores para el cálculo de los valores de la variable predeterminada difieren de manera sustancial. Definitivamente, sólo sería posible un análisis comparativo a partir de la consideración de iguales premisas.

En resumen, pues, nos encontramos ante un poderoso instrumento de trabajo que no ha sido suficientemente explotado y que con sus 78 años de historia sigue siendo de gran utilidad y eficacia, a pesar de no encontrar una posición clara en el marco de los estudios econométricos.

1. LAURENT, H., *Statistique mathématique,* París, 1908.
2. Son célebres las polémicas que enfrentaron a Pareto con Edgeworth y otros sobre la consideración de la ley natural de la distribución de la riqueza.
3. Las cifras se refieren al período comprendido entre julio de 1973 y junio de 1974.
4. INE, *Encuesta de presupuestos familiares,* Madrid, 1975.
5. Se ha considerado esta cifra por entender que es el inicio del intervalo que posee altura suficiente en el histograma para limitar al trazo de la hipérbola, despreciando los dos primeros escalones de renta que se corresponderían con las clases pasivas y más débiles del país.
6. GONZÁLEZ-QUIJANO, F., *La curva de Pareto y la distribución de la riqueza,* Madrid, 1966. El autor ha efectuado el ajuste para las rentas superiores a 200.000 ptas.
7. PENA TRAPERO, J. B., *Modelo econométrico para el estudio de la distribución personal de la renta en España,* Madrid, 1965. El autor ajustó a la función de Pareto sin límite alguno de ingresos, al final sacaría la conclusión de que ésta no era aplicable al caso español.

JAIME CONSTANTÍ MATA: **Notas para una crítica y generalización del modelo de intercambio desigual de Emmanuel** *

El artículo siguiente constituye una crítica al cálculo de los precios de producción en el modelo de intercambio desigual de Emmanuel. Como explicaremos, la transformación de valores a precios efectuada por Emmanuel es incorrecta. Al mismo tiempo, constataremos que la exposición de sus conjeturas queda exenta de generalidad al presentarse bajo ejemplos numéricos.

Nuestro trabajo consiste en: *a*) Señalar y explicar las incorrecciones de la transformación de Emmanuel; *b*) Proceder al cálculo correcto de los modelos